Kovaryans (σ_{ij}), y_i ve y_j ölçüm değerlerine bağlıdır. σ_{ij}'yi standartlaştırmak için, y_i ve y_j'nin standart sapmaları çarpımına bölerek korelasyonu elde ederiz.

$$\rho_{ij} = corr(y_i, y_j) = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \cdot \sigma_j}$$ bulunur.

2.3. Rastgele Vektörler için Ortalama Vektörleri ve Kovaryans Matrisleri

$y_1, \dots, y_p$, $p \times 1$ boyutlu tesadüfi vektörün beklenen değeri,

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}_{p \times 1}$$

$$E(y) = \begin{bmatrix} E(y_1) \\ \vdots \\ E(y_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \mu$$

y_i'nin marjinal yoğunluk fonk. $f_i(y_i)$ olsun. $E(y_i) = \mu_i = \int y_i \cdot f_i(y_i) \cdot dy_i$ şeklindedir.

X, Y $p \times 1$ boyutlu tes. vektörler ise

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

$y_1, \ldots, y_p$ 'nin varyansları σ_i^2 ve $i \neq j$ durumunda kovaryansları σ_{ij} olsun.
Bu durumunda kovaryans matrisi,

$$Cov(y) = \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & & & \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_p^2 \end{bmatrix}$$

burada,

$$\sigma_i^2 = \sigma_{ii} \longrightarrow \text{varyanslar}$$

$$\sigma_{ij} = Cov(y_i, y_j) \longrightarrow \text{kovaryanslar.}$$

Bu matris bir beklenen değer matrisidir. Yani,

$$\Sigma = E[(y-\mu).(y-\mu)'] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1p} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ \sigma_{p1} & \cdots & \sigma_{p}^2 \end{bmatrix}$$

$i = j$ ise

$$\sigma_{ii} = \sigma_i^2 = E(y-\mu)^2$$

$i \neq j$ ise

$$\sigma_{ij} = E[(y-\mu).(y-\mu)']$$

dır.

$p = 3$ alınırsa,

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}$$

Varyans-kovaryans matrisini oluşturalım.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} (y_1-\mu_1) \\ (y_2-\mu_2) \\ (y_3-\mu_3) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} (y_1-\mu_1) & (y_2-\mu_2) & (y_3-\mu_3) \end{bmatrix}$$

$$= E\begin{bmatrix} (y_1-\mu_1)^2 & (y_1-\mu_1)\cdot(y_2-\mu_2) & (y_1-\mu_1)\cdot(y_2-\mu_2) \\ (y_2-\mu_2)\cdot(y_1-\mu_1) & (y_2-\mu_2)^2 & (y_2-\mu_2)\cdot(y_3-\mu_3) \\ (y_3-\mu_3)\cdot(y_1-\mu_1) & (y_3-\mu_3)\cdot(y_2-\mu_2) & (y_3-\mu_3)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E(y_1-\mu_1)^2 & E[(y_1-\mu_1)\cdot(y_2-\mu_2)] & E[(y_1-\mu_1)(y_3-\mu_3)] \\ - & E(y_2-\mu_2)^2 & E[(y_2-\mu_2)\cdot(y_3-\mu_3)] \\ - & - & E(y_3-\mu_3)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{bmatrix}$$

Vektörel olarak yazılırsa,

$$\Sigma = E[(y-\mu)\cdot(y-\mu)'] = E(y\cdot y') - \mu\cdot\mu'$$

Genelleştirilmiş Varyans:

y t.d. nin değişkenliğinin genel bir ölçüsü olarak kullanılır ve varyans-kovaryans matrisinin determinantıdır.

Genelleştirilmiş Varyans $= |\Sigma|$

Standartlaştırılmış Uzaklık

y t.d. ri ile μ arasındaki uzaklık olup, tek değişkenli

$$z = \frac{y-\mu}{\ } \sim N(0,1) \text{ ile}$$

standartlaştırılmış uzaklık,

$St.$ uzaklık $= (y-\mu)' \cdot \Sigma^{-1} \cdot (y-\mu)$

- Korelasyon matrisi:

Varyans-kovaryans matrisi kullanarak elde edilen korelasyon matrisi,

$$\rho_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1p} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2p} \\ \vdots & & & \\ \rho_{p1} & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} = P$$

burada,

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \cdot \sigma_j}$$ → y_i ve y_j arasındaki korelasyondur.

$$D = [Diag(\Sigma)]^{1/2}$$

$$\sqrt{\sigma_{ii}} = D \quad , \quad i = 1, \ldots, p$$

$$= Diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_p)$$

$$P = \frac{\Sigma}{D \cdot D} = (D^{-1})' \Sigma \cdot D^{-1}$$

ve buradan

$$\Sigma = D' \cdot P \cdot D$$ yazılır.

3.5. BÖLÜNMÜŞ RASTGELE VEKTÖRLER İÇİN ORTALAMA VEKTÖRLERİ VE KOVARYANS MATRİSLERİ

$$v = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$$

olarak v vektörünü x ve y olarak iki alt kümeye bölelim.

Böylece, v içerisinde p+q tane rasgele değişken yer almaktadır. Bu durumda,

$$\mu = E(v) = E\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(y) \\ E(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_y \\ \mu_x \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Cov}(v) = \Sigma = \mathrm{cov}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_{yy} & \Sigma_{yx} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{xx} \end{pmatrix}$$

olmaktadır. Burada $\Sigma_{xy} = \Sigma_{yx}'$ dir.

$$\Sigma_{yy} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{y_1} & \sigma_{y_1 y_2} & \cdots & \sigma_{y_1 y_p} \\ \vdots & & & \sigma_{y_2 y_p} \\ \vdots & & \ddots & \\ \sigma_{y_p y_1} & \sigma_{y_p y_2} & \cdots & \sigma^2_{y_p} \end{bmatrix}$$

Σ_{yx} kovaryans matrisi ayrıca, $cov(y,x)$ şeklinde de gösterilebilir ve

$$\Sigma_{yx} = cov(y,x) = E\left[(y-\mu_y)(x-\mu_x)'\right]$$

olarak tanımlanabilir. Kovaryansın üç farklı gösterimi vardır. Bunlar;

1. $cov(y_i, y_j) \rightarrow$ Sayısal gösterim
2. $cov(y) \rightarrow$ Simetrik matris
3. $cov(y,x) \rightarrow$ Dikdörtgensel matris

3.6. Rasgele Vektörlerin Doğrusal Fonksiyonları

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p)'$ sabitlerden oluşan bir vektör olsun. Bu durumda, α terimlerini içeren doğrusal kombinasyon;

$$z = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_p y_p = \alpha' y$$

şeklinde yazılabilir.

y bir rastgele vektör ise $z = a'y$ de rasgele bir değişkendir.

$$\mu_z = E(a'y) = a' E(y) = a'\mu \text{ 'dür.}$$

Yani;

$$\begin{aligned} E(a'y) &= E(a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_p y_p) \\ &= E(a_1 y_1) + \cdots + E(a_p y_p) \\ &= a_1 E(y_1) + \cdots + a_p E(y_p) \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E(y_1) \\ E(y_2) \\ \vdots \\ E(y_p) \end{pmatrix}$$

$= a' \cdot E(y) = a'\mu$ olarak ifade edilir.

* y rasgele bir vektör, X rasgele bir matris, a ve b sabitlerden oluşan vektör ve A ve B sabitlerin matrisi olsun.

1. $E(Ay) = A \cdot E(y)$
2. $E(a'Xb) = a' E(X) b$
3. $E(AXB) = A E(X) B$

* A, $k \times p$ boyutlu sabitlerden oluşan bir matris; b, $k \times 1$ boyutlu sabitlerden oluşan bir vektör ve y, $p \times 1$ boyutlu rasgele vektör ise,

$$E(Ay + b) = A E(y) + b$$

Varyans – Kovaryans:

$z = a'.y$ tesadüfi değişkeninin varyansı. $V(z) = V(a'y) = a'.\Sigma.a$

a; $p\times 1$ sabitler vektörü, y; $p\times 1$ rastgele vektör, Σ kovaryans matrisi olsun,

$E(y-\mu)^2$

$$V(z) = V(a'y) = E(a'.y - a'\mu)^2$$
$$= E[a'.(y-\mu)]^2$$
$$= E[a'.(y-\mu).a'.(y-\mu)]$$
$$= E[a'.(y-\mu).(y-\mu)'.a]$$
$$= a'.E[(y-\mu).(y-\mu)'].a$$
$$= a'.\Sigma.a$$ bulunur.

$p=3$ için

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}_{3\times 1}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}_{3\times 1}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$z = a'.y$

$$\Rightarrow V(a'.y) = V(a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3) = a'.\Sigma.a$$

$$= (a_1 \; a_2 \; a_3)_{1\times 3} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{bmatrix}_{3\times 1} . \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$= [a_1\sigma_1^2 + a_2\sigma_{21} + a_3\sigma_{31} \quad a_1\sigma_{12} + a_2\sigma_2^2 + a_3\sigma_{32} \quad a_1\sigma_{13} + a_2\sigma_{23} + a_3\sigma_3^2] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$= a_1^2\sigma_1^2 + a_1a_2\sigma_{21} + a_1a_3\sigma_{31} + a_2a_1\sigma_{12} + a_2^2\sigma_2^2 + a_2a_3\sigma_{32} + a_3a_1\sigma_{13} + a_3a_2\sigma_{23} + a_3^2\sigma_3^2$$

$$= a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + a_3^2\sigma_3^2 + 2a_1a_2\sigma_{12} + 2a_1a_3\sigma_{13} + 2a_2a_3\sigma_{23}$$

Sonuç: a ve b; $p\times 1$ sabitlerden oluşan vektörler ise

$$Cov(a'y; b'y) = a'\Sigma . b \text{ olur.}$$

$z = A.y$, $w = B.y$ olsun. $A_{k\times p}$, $B_{m\times p}$ sabitler matrisi, $y_{p\times 1}$ rastgele vektör, ~~ile~~ Σ kovaryans matrisi ile

1: $Cov(z) = Cov(A.y) = A.\cancel{\Sigma}A'$

2: $Cov(z, w) = cov(A.y, B.y) = A.\Sigma.B'$.